

数 学

この冊子は、数学の問題で1ページより11ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号記入の指示があったら、解答用紙に受験番号と氏名を記入してください。また、解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し、さらに受験番号をマークしてください。
- (3) 解答は、所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは、絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HB または B)を使用してください。
指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は、消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取除いたうえ、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは、横1行について1箇所に限ります。
2箇所以上マークすると採点されません。
あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
 - ⑤ 解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を、必ず読んでから解答してください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の 内の ア から ル に当てはまる 0 から 9 までの数字を求め、その数字を解答用マークシートの解答欄の指定された行にマークせよ。なお、 シ などが 2 度現れる場合、2 度目は シ などのように網掛けで表記する。 | は 2 桁の数を表す。また、値が根号を含む場合は、根号の中にあられる自然数が最小になる形で表すものとする。分数は既約分数として表すものとする。 (30 点)

(1) 座標平面上に 3 点 A (-1, 0), B (1, 0), C (0, 1) がある。

(a) 楕円

$$E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b > 0)$$

は 2 点 A, B を焦点としてもつとする。このとき、 $b = \sqrt{\text{ア}}$ である。

(b) 2 点 A, C を通る直線と、(a) で定めた楕円 E の交点を P(x_0, y_0) ($x_0 > 0$) とすると、

$$x_0 = -\frac{\text{イ}}{\text{ウ}} + \frac{\text{エ}}{\text{オ}} \sqrt{\text{カ}}, \quad y_0 = \frac{\text{キ}}{\text{ク}} + \frac{\text{ケ}}{\text{コ}} \sqrt{\text{サ}}$$

である。

(c) (b) で定めた点 P に対して、 $PB + PC = \text{シ} - \sqrt{\text{ス}}$ である。

$QB + QC = \text{シ} - \sqrt{\text{ス}}$ となるような点 Q (x, y) の軌跡の方程式は

$$\frac{(x-y)^2}{\alpha} + \frac{(x+y-\gamma)^2}{\beta} = 1$$

である。このとき、

$$\alpha = \text{セ} - \text{ソ} \sqrt{\text{タ}}, \quad \beta = \text{チ} - \text{ツ} \sqrt{\text{テ}}, \quad \gamma = \text{ト}$$

となる。

(下書き用紙)

(2) 座標平面上の原点 $O(0, 0)$, 点 $A(2, 2)$, 点 $B(k, 0)$ を通り, 軸が y 軸に平行な放物線を C とする。ただし, $k > 2$ とする。

(a) 放物線 C の方程式を k を用いて表すと,

$$y = -\frac{\boxed{\text{ナ}}}{k - \boxed{\text{ニ}}}x^2 + \frac{k}{k - \boxed{\text{ヌ}}}x$$

である。

(b) 放物線 C と x 軸で囲まれた部分の面積 S を k を用いて表すと,

$$S = \frac{k \boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}(k - \boxed{\text{ハ}}) \boxed{\text{ヒ}}}$$

である。また, k を $k > 2$ の範囲で動かすとき, S の最小値は $\frac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘ}}}$ であり, そのときの k の値は $k = \boxed{\text{ホ}}$ である。

(c) 放物線 C と x 軸で囲まれた部分を放物線 C の軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を k を用いて表すと,

$$V = \frac{k \boxed{\text{マ}}}{\boxed{\text{ミ}} \mid \boxed{\text{ム}}(k - \boxed{\text{メ}}) \boxed{\text{モ}} \pi}$$

である。また, k を $k > 2$ の範囲で動かすとき, V の最小値は $\frac{\boxed{\text{ヤ}} \mid \boxed{\text{ユ}}}{\boxed{\text{ヨ}} \mid \boxed{\text{ラ}}} \pi$

であり, そのときの k の値は $k = \frac{\boxed{\text{リ}}}{\boxed{\text{ル}}}$ である。

(下書き用紙)

問題 **2** の解答は解答用紙に記入しなさい。答だけでなく、答を導く過程も記入しなさい。

2 各辺の長さが整数であるような三角形を考え、その 3 辺の長さを x, y, z ($x \leq y \leq z$) とする。また、 n を自然数とする。このとき以下の問いに答えよ。 (35 点)

- (1) $z = n$ であるような三角形の個数を a_n とするとき、 a_5 および a_6 を求めよ。
- (2) (1)の a_n を n の式で表せ。
- (3) $z \leq n$ であるような三角形の個数を b_n とする。
 - (a) b_n を n の式で表せ。
 - (b) $b_n > 2015$ となるような最小の自然数 n を求めよ。
- (3) $z = n$ であるような三角形で二等辺三角形でないものの個数を c_n とするとき、 c_n を n の式で表せ。

(下書き用紙)

問題 **3** の解答は解答用紙に記入しなさい。答だけでなく、答を導く過程も記入しなさい。

3 不等式 $\frac{x}{x-1} \geq 0$ をみたす実数 x の範囲を定義域とする関数

$$f(x) = 3x \sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

について、以下の問いに答えよ。

(35点)

- (1) 関数 $f(x)$ の定義域を求めよ。
- (2) $a_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, $a_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ とする。 a_1 , a_2 の値を求めよ。
- (3) (2) の a_1 , a_2 に対して, $b_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - a_1x)$, $b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - a_2x)$ とする。
 b_1 , b_2 の値を求めよ。
- (4) 関数 $f(x)$ の極小値を求めよ。
- (5) 曲線 $y = f(x)$ の漸近線の方程式を求めよ。
- (6) k を定数とするとき, 方程式 $f(x) = k$ の実数解の個数を求めよ。

(下書き用紙)