2014 年度

〔試験時間　100 分〕

数　　学

この冊子は，数学の問題で１ページより 13 ページまであります。

〔注　　意〕

（1） 試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

（2） 監督者から受験番号記入の指示があったら，解答用紙に受験番号と氏名を記入してください。また，解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し，さらに受験番号をマークしてください。

（3） 解答は，所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

（4） 解答用マークシートについて

① 解答用マークシートは，絶対に折り曲げてはいけません。

② マークには黒鉛筆(HB または B)を使用してください。
指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③ 誤ってマークした場合は，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④ 解答欄のマークは，横１行について１箇所に限ります。
２箇所以上マークすると採点されません。
あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

⑤ 解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を，必ず読んでから解答してください。

（5） 試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

（6） 問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

（下書き用紙）

（下書き用紙）

問題 $\boxed{1}$ の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

$\boxed{1}$ 次の$\boxed{}$内の **ア** から **フ** に当てはまる 0 から 9 までの数字を求め，その数字を解答用マークシートの解答欄の指定された行にマークせよ。ただし，$\boxed{|}$は 2 桁の数を表すものとする。また，分数は既約分数として表すものとする。　(40 点)

(1)　1 から 8 までの番号が 1 つずつ書かれた 8 枚のカードがある。

(a)　この 8 枚のカードから 2 枚を同時に抜き出したときの番号の和の期待値は$\boxed{\text{ア}}$である。

(b)　この 8 枚のカードから 2 枚を同時に抜き出すとき，2 つの番号の和が 8 以上である確率は$\dfrac{\boxed{\text{イ}|\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}|\text{オ}}}$である。

(c)　この 8 枚のカードから 2 枚を同時に抜き出すとき，2 つの番号の積が 4 の倍数である確率は$\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$である。

（下書き用紙）

(2)　$a, b, c, d, \alpha, \beta$ は実数とし，次の 2 つの等式が x についての恒等式となるとする。

$$(x+\alpha)(x^2+ax+b)=x^3+cx^2+39x+56$$

$$(x+\beta)(x^2+ax+b)=x^3+dx^2+31x+42$$

このとき，

(a)　$b+\alpha a=$ クケ ，$b+\beta a=$ コサ ，$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\text{シ}}{\text{ス}}$ である。

(b)　$a=$ セ ，$b=$ ソ ，$c=$ タチ ，$d=$ ツテ である。

（下書き用紙）

(3)　$f(x) = |\cos x| - \cos x$ とする。

(a)　$f(x) = 1$ をみたす $x(x > 0)$ の値を小さい順に a_1，a_2，$a_3 \dots$ とする。このとき，

$$a_1 = \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}\pi \ , \ a_2 = \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}\pi \ , \ a_3 = \frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}\pi$$

である。

(b)　定積分 $\int_{a_1}^{a_3} f(x)\sin(x + a_2)\,dx$ の値は $\frac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}\sqrt{\boxed{\text{フ}}}\,\pi$ である。

（下書き用紙）

問題 $\boxed{2}$ の解答は解答用紙に記入しなさい。答だけでなく，答を導く過程も記入しなさい。

$\boxed{2}$ 座標平面において，曲線 C：$y = 2x - xe^{-x}$ と直線 ℓ：$y = 2x$ がある。ただし，e は自然対数の底とする。a は $a > 1$ をみたす実数とし，直線 $x = a$ と曲線 C の交点を A，直線 $x = a$ と直線 ℓ の交点を B とする。また，曲線 C 上の点 A における接線と直線 ℓ の交点を P とし，点 P の x 座標を p とする。このとき，次の問いに答えよ。（30 点）

(1) 曲線 C 上の点 A における接線の方程式を求めよ。

(2) p を a を用いて表せ。

(3) 曲線 C と直線 ℓ および 2 直線 $x = a$, $x = p$ で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とし，三角形 ABP の面積を $T(a)$ とする。

(a) $T(a)$ を a を用いて表せ。

(b) $S(a)$ を a を用いて表せ。

(c) 極限値 $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{S(a)}{T(a)}$ を求めよ。

（下書き用紙）

問題 $\boxed{3}$ の解答は解答用紙に記入しなさい。答だけでなく，答を導く過程も記入しなさい。

$\boxed{3}$ 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は

- $\tan a_n = \frac{1}{n^2+n+1}$ ，$0 < a_n < \frac{\pi}{2}$
- $\tan b_n = \alpha n + \beta$ $\left(\alpha,\ \beta\ \text{は定数}\right)$，$-\frac{\pi}{2} < b_n < \frac{\pi}{2}$
- $\tan a_n = \tan(b_{n+1} - b_n)$

を満たすとする ($n = 1, 2, 3 \ldots\ldots$)。このとき，次の問いに答えよ。 (30 点)

(1) α と β を求めよ。

(2) b_1 を求めよ。

(3) 極限値 $\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ。ただし，必要ならば，

$$\frac{\pi}{2} - x < \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

が成り立つことを用いてもよい。

(4) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和を求めよ。

(5) 自然数 n に対し，$\tan(b_{n+1} - b_{n-1})$ を n の式で表せ。ただし，$b_0 = 0$ とする。

(6) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1} - b_{n-1})$ の和を求めよ。ただし，$b_0 = 0$ とする。

（下書き用紙）