2011 年度

〔試験時間　100 分〕

数　　　学

この冊子は，数学の問題で１ページより 9 ページまであります。

〔注　　　意〕

（1） 試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

（2） 監督者から受験番号記入の指示があったら，解答用紙に受験番号と氏名を記入してください。また，解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し，さらに受験番号をマークしてください。

（3） 解答は，所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

（4） 解答用マークシートについて

① 解答用マークシートは，絶対に折り曲げてはいけません。

② マークには黒鉛筆(HB または B)を使用してください。
指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③ 誤ってマークした場合は，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④ 解答欄のマークは，横１行について１箇所に限ります。
２箇所以上マークすると採点されません。
あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

⑤ 解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を，必ず読んでから解答してください。

（5） 試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

（6） 問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

（下書き用紙）

（下書き用紙）

問題 $\boxed{1}$ の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

$\boxed{1}$ 次の$\boxed{}$内の ア から コ に当てはまる 0 から 9 までの数字を求め，その数字を解答用マークシートの解答欄の指定された行にマークせよ。ただし，$\boxed{|}$は 2 桁の数を表す。また，分数は既約分数として表すものとする。（30 点）

1 個のサイコロを 3 回投げ，1 回目に出た目を a，2 回目に出た目を b，3 回目に出た目を c とする。この操作に整数 $n = a \times 10^2 + b \times 10 + c$ を対応させる。

(1) n が奇数になる確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。

(2) n が 3 の倍数になるためには $a + b + c$ が 3 で割り切れることが必要十分条件であるから，n が 3 の倍数になる確率は $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である。

(3) n が 7 の倍数になるためには $2a + 3b + c$ が 7 で割り切れることが必要十分条件であるから，n が 7 の倍数になる確率は $\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ|キ}}$ である。

(4) n が 11 で割り切れる確率は $\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ|コ}}$ である。

（下書き用紙）

問題 $\boxed{2}$ の解答は解答用紙に記入しなさい。答だけでなく，答を導く過程も記入しなさい。

$\boxed{2}$ a を正の実数とし，xy 平面上の放物線 C：$y=x^2$ の点 $\mathrm{P}\,(a,\ a^2)$ を考える。このとき次の問いに答えよ。（35 点）

⑴　P における C の法線を l とし，l と C の交点で P と異なるものを Q とする。

(a)　法線 l の方程式を a を用いて表せ。

(b)　Q の x 座標を a を用いて表せ。

(c)　a が正の実数を動くとき，線分 PQ の長さが最小となる a の値を求めよ。

⑵　放物線 C 上の点 R における C の法線を l_R とする。

(a)　法線 l_R が点 P を通るような点 R $(R \neq P)$ を考える。このような R が 2 個あるための a の条件を求めよ。

(b)　(a)で考えた条件をみたす 2 個の R を R_1，R_2 とするとき，$\triangle \mathrm{PR}_1\mathrm{R}_2$ の面積を a を用いて表せ。

（下書き用紙）

問題 $\boxed{3}$ の解答は解答用紙に記入しなさい。答だけでなく，答を導く過程も記入しなさい。

$\boxed{3}$ t を正の実数とする。O を原点とする xy 平面において, 2 つの曲線

$$C_1 : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \quad (x \geqq 0\ ,\ y \geqq 0)$$

$$C_2 : y = \frac{1}{tx}$$

が異なる 2 点 P , Q で交わっているとする。ただし, P の x 座標は Q の x 座標より小さいとする。曲線 C_1 と線分 OP, 線分 OQ で囲まれた図形の面積を $S_1(t)$, 曲線 C_2 と線分 OP, 線分 OQ で囲まれた図形の面積を $S_2(t)$ とする。次の問いに答えよ。 (35 点)

(1) t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $t = 2$ とし, P , Q の x 座標をそれぞれ $2\sin\alpha$, $2\sin\beta$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2},\ 0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$ とおく。

(a) 加法定理を利用して $\beta - \alpha$ を求めよ。

(b) $S_1(2)$ を求めよ。

(c) $S_2(2)$ を求めよ。

(3) P , Q の座標を t を用いて表せ。

（下書き用紙）