

2010 年度

[試験時間 100 分]

数 学

この冊子は、数学の問題で1ページより13ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号記入の指示があったら、解答用紙に受験番号と氏名を記入してください。また、解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し、さらに受験番号をマークしてください。
- (3) 解答は、所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは、絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HB または B)を使用してください。
指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は、消しゴムで丁寧に消し、消しきずを完全に取り除いたうえ、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは、横1行について1箇所に限ります。
2箇所以上マークすると採点されません。
あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
 - ⑤ 解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を、必ず読んでから解答してください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

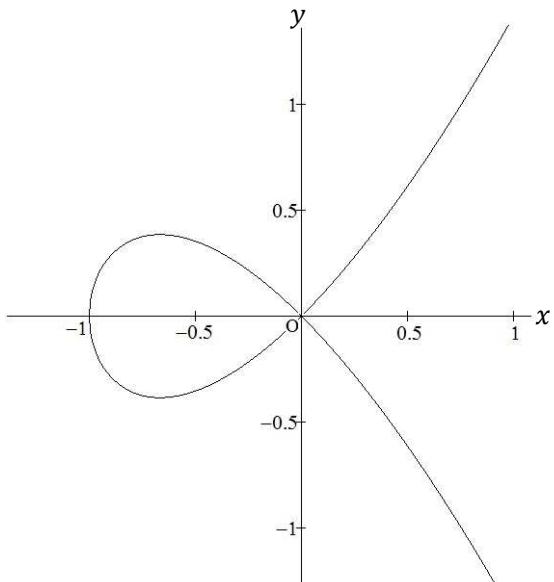
問題 **1** の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の(1)から(4)において、内のカタカナに当てはまる 0 から 9 までの数字を求め、その数字を解答用マークシートにマークせよ。また分数における分母と分子は、1 以外の公約数をもたないものとする。

(1) xy 平面において $y^2 = x^2(x + 1)$ をみたす点 (x, y) の全体は下の図のような曲線になる。この曲線を C とする。また、中心を $(a, 0)$ 、半径を r とする円 D は不等式 $x \leq 0$ の表す領域に含まれ、円 D と曲線 C とは点 $(-1, 0)$ を含むちょうど 3 点を共有している。このとき、

$$a = -\frac{\text{ア}}{\text{イ}}, \quad r = \frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$$

である。



(下書き用紙)

(2)

(a) $x^2 - 2xy + 2y^2 - 6x + 18 = 0$ をみたす実数 x, y の組は,

$$(x, y) = (\boxed{\text{オ}}, \boxed{\text{カ}})$$

である。

(b) $k\ell + k - 2\ell - 9 = 0$ をみたす整数 k, ℓ の組は, k の値が大きい順に,

$$(k, \ell) = (\boxed{\text{キ}}, \boxed{\text{ク}}), (\boxed{\text{ケ}}, \boxed{\text{コ}}), (\boxed{\text{サ}}, -\boxed{\text{シ}}),$$

$$(-\boxed{\text{ス}}, -\boxed{\text{セ}})$$

である。これを用いると, $(m+2n)(2m-n) - 3m + 4n - 9 = 0$ をみたす整数 m, n の組は,

$$(m, n) = (\boxed{\text{ソ}}, \boxed{\text{タ}}), (-\boxed{\text{チ}}, \boxed{\text{ツ}})$$

であることがわかる。

(下書き用紙)

(3) 座標空間において、2 定点 $A(2, 1, 2)$, $B(-1, -2, -2)$ と、平面 $z = 1$ 上の動点 P がある。点 P から xy 平面に下ろした垂線と xy 平面との交点を Q とする。点 P が平面 $z = 1$ 上を動くとき、 $AP + PQ + QB$ は点 P の座標が $(\boxed{\text{テ}}, \boxed{\text{ト}}, \boxed{\text{ナ}})$ のとき最小値 $\boxed{\text{ニ}} + \boxed{\text{ヌ}} \sqrt{\boxed{\text{ネ}}}$ をとる。

(4) 行列

(下書き用紙)

問題 **2** の解答は解答用紙に記入しなさい。答だけでなく、答を導く過程も記入しなさい。

2 t を正の実数とすると、O を原点とする xy 平面において、放物線

$$C_1 : y = x^2$$

と、 x 軸に平行な直線

$$\ell : y = t^2$$

は 2 点 P, Q で交わる。ただし、P の x 座標は負で、Q の x 座標は正であるとする。さらに、線分 PQ を直径とする円を C_2 とする。そして、不等式 $y \leq x^2$ の表す領域と、円 C_2 の内部(境界も含む)との共通部分を $D(t)$ とし、その面積を $S(t)$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 円 C_2 の方程式を求めよ。
- (2) 放物線 C_1 と円 C_2 の共有点の個数を t の値で場合分けして求めよ。
- (3) $0 < t < 1$ のとき、 $S(t)$ を求めよ。
- (4) t が $0 < t < 1$ の範囲を動くときの $S(t)$ の最大値を求めよ。
- (5) $t > 1$ のとき、 y 軸に平行な直線 $x = c$ が領域 $D(t)$ の第 1 象限の部分と交わるような定数 c の範囲は、 t のある式 $\alpha(t), \beta(t)$ によって $\alpha(t) \leq c \leq \beta(t)$ で表される。 $\alpha(t), \beta(t)$ を求めよ。また、 $\alpha(t) \leq c \leq \beta(t)$ をみたす c に対して、直線 $x = c$ と領域 $D(t)$ の交わりとなる線分の長さは $\frac{1}{4}$ 以下であることを示せ。
- (6) $t > 1$ のとき $tS(t) \leq \frac{1}{2}$ が成り立つことを示せ。

(下書き用紙)

問題 **3** の解答は解答用紙に記入しなさい。答だけでなく、答を導く過程も記入しなさい。

3 xy 平面において、直線

$$\ell : x = 2$$

と曲線

$$C : y = x^3 - 2x - 2$$

を考える。このとき次の問い合わせよ。

- (1) 各実数 a に対して、点 $(2, a)$ を通る曲線 C の接線の本数を求めよ。
- (2) サイコロを投げて直線 ℓ 上の点 A を次の規則に従って動かすものとする。
 - (i) 4 以下の目が出た場合は、直線 ℓ 上の、 y 座標が 1 つだけ大きい点に移動する。
 - (ii) 5 または 6 の目が出た場合は動かさない。A が最初は $(2, 0)$ にあったとして、次の問い合わせよ。
 - (a) n を自然数、 k を $0 \leq k \leq n$ をみたす整数とするとき、 n 回サイコロを投げた後に点 A が点 $(2, k)$ にある確率 $p_n(k)$ を求めよ。
 - (b) 自然数 n に対して、 n 回サイコロを投げた後の点 A を通る曲線 C の接線の本数の期待値 E_n を求めよ。
 - (c) E_n を(b)で定めたものとするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n$ を求めよ。ただし必要ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3^n} = 0$ ということを用いてよい。

(下書き用紙)