

# 数 学

この冊子は、数学の問題で1ページより13ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号記入の指示があったら、解答用紙に受験番号と氏名を記入してください。また、解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し、さらに受験番号をマークしてください。
- (3) 解答は、所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
  - ① 解答用マークシートは、絶対に折り曲げてはいけません。
  - ② マークには黒鉛筆(HB または B)を使用してください。  
指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
  - ③ 誤ってマークした場合は、消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取除いたうえ、新たにマークしてください。
  - ④ 解答欄のマークは、横1行について1箇所に限ります。  
2箇所以上マークすると採点されません。  
あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
  - ⑤ 解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を、必ず読んでから解答してください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。  
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

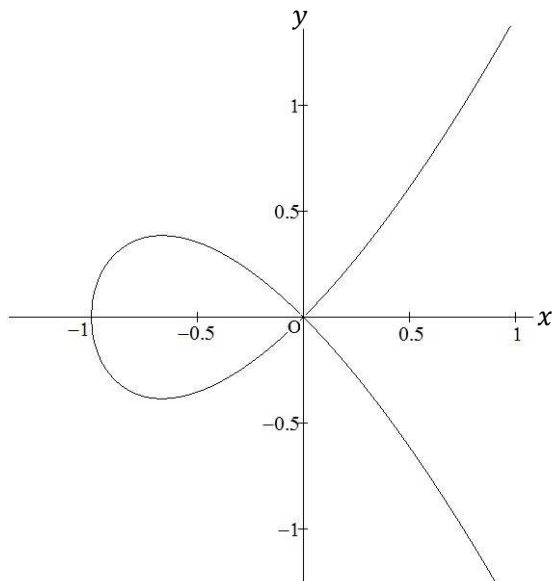
問題 1 の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の(1)から(4)において、内のカタカナに当てはまる 0 から 9 までの数字を求め、その数字を解答用マークシートにマークせよ。また分数における分母と分子は、1 以外の公約数をもたないものとする。

(1)  $xy$  平面において  $y^2 = x^2(x+1)$  をみたす点  $(x, y)$  の全体は下の図のような曲線になる。この曲線を  $C$  とする。また、中心を  $(a, 0)$ 、半径を  $r$  とする円  $D$  は不等式  $x \leq 0$  の表す領域に含まれ、円  $D$  と曲線  $C$  とは点  $(-1, 0)$  を含むちょうど 3 点を共有している。このとき、

$$a = -\frac{\text{ア}}{\text{イ}}, \quad r = \frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$$

である。



(下書き用紙)

(2)

(a)  $x^2 - 2xy + 2y^2 - 6x + 18 = 0$  をみたす実数  $x, y$  の組は,

$$(x, y) = (\boxed{\text{オ}}, \boxed{\text{カ}})$$

である。

(b)  $k\ell + k - 2\ell - 9 = 0$  をみたす整数  $k, \ell$  の組は,  $k$  の値が大きい順に,

$$(k, \ell) = (\boxed{\text{キ}}, \boxed{\text{ク}}), (\boxed{\text{ケ}}, \boxed{\text{コ}}), (\boxed{\text{サ}}, -\boxed{\text{シ}}), \\ (-\boxed{\text{ス}}, -\boxed{\text{セ}})$$

である。これを用いると,  $(m + 2n)(2m - n) - 3m + 4n - 9 = 0$  をみたす整数  $m, n$  の組は,

$$(m, n) = (\boxed{\text{ソ}}, \boxed{\text{タ}}), (-\boxed{\text{チ}}, \boxed{\text{ツ}})$$

であることがわかる。

(下書き用紙)

(3) 座標空間において、2 定点  $A(2, 1, 2)$ ,  $B(-1, -2, -2)$  と、平面  $z = 1$  上の動点  $P$  がある。点  $P$  から  $xy$  平面に下ろした垂線と  $xy$  平面との交点を  $Q$  とする。点  $P$  が平面  $z = 1$  上を動くとき、 $AP + PQ + QB$  は点  $P$  の座標が  $(\boxed{\text{テ}}, \boxed{\text{ト}}, \boxed{\text{ナ}})$  のとき最小値

$\boxed{\text{ニ}} + \boxed{\text{ヌ}}\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}$  をとる。

(4) 行列



(下書き用紙)

問題 2 の解答は解答用紙に記入しなさい。答だけでなく、答を導く過程も記入しなさい。

2  $t$  を正の実数とすると、 $O$  を原点とする  $xy$  平面において、放物線

$$C_1 : y = x^2$$

と、 $x$  軸に平行な直線

$$\ell : y = t^2$$

は 2 点  $P, Q$  で交わる。ただし、 $P$  の  $x$  座標は負で、 $Q$  の  $x$  座標は正であるとする。さらに、線分  $PQ$  を直径とする円を  $C_2$  とする。そして、不等式  $y \leq x^2$  の表す領域と、円  $C_2$  の内部(境界も含む)との共通部分を  $D(t)$  とし、その面積を  $S(t)$  とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 円  $C_2$  の方程式を求めよ。
- (2) 放物線  $C_1$  と円  $C_2$  の共有点の個数を  $t$  の値で場合分けして求めよ。
- (3)  $0 < t < 1$  のとき、 $S(t)$  を求めよ。
- (4)  $t$  が  $0 < t < 1$  の範囲を動くときの  $S(t)$  の最大値を求めよ。
- (5)  $t > 1$  のとき、 $y$  軸に平行な直線  $x = c$  が領域  $D(t)$  の第 1 象限の部分と交わるような定数  $c$  の範囲は、 $t$  のある式  $\alpha(t), \beta(t)$  によって  $\alpha(t) \leq c \leq \beta(t)$  で表される。 $\alpha(t), \beta(t)$  を求めよ。また、 $\alpha(t) \leq c \leq \beta(t)$  をみたす  $c$  に対して、直線  $x = c$  と領域  $D(t)$  の交わりとなる線分の長さは  $\frac{1}{4}$  以下であることを示せ。
- (6)  $t > 1$  のとき  $tS(t) \leq \frac{1}{2}$  が成り立つことを示せ。

(下書き用紙)

問題 **3** の解答は解答用紙に記入しなさい。答だけでなく、答を導く過程も記入しなさい。

**3**  $xy$  平面において、直線

$$\ell : x = 2$$

と曲線

$$C : y = x^3 - 2x - 2$$

を考える。このとき次の問いに答えよ。

- (1) 各実数  $a$  に対して、点  $(2, a)$  を通る曲線  $C$  の接線の本数を求めよ。
- (2) サイコロを投げて直線  $\ell$  上の点  $A$  を次の規則に従って動かすものとする。
- (i) 4 以下の目が出た場合は、直線  $\ell$  上の、 $y$  座標が 1 つだけ大きい点に移動する。
  - (ii) 5 または 6 の目が出た場合は動かさない。
- $A$  が最初は  $(2, 0)$  にあったとして、次の問いに答えよ。
- (a)  $n$  を自然数、 $k$  を  $0 \leq k \leq n$  をみたす整数とすると、 $n$  回サイコロを投げた後に点  $A$  が点  $(2, k)$  にある確率  $p_n(k)$  を求めよ。
- (b) 自然数  $n$  に対して、 $n$  回サイコロを投げた後の点  $A$  を通る曲線  $C$  の接線の本数の期待値  $E_n$  を求めよ。
- (c)  $E_n$  を(b)で定めたものとするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n$  を求めよ。ただし必要ならば
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3^n} = 0 \text{ という事実を用いてよい。}$$

(下書き用紙)