

2007 年度

[試験時間 100 分]

数 学

この冊子は、数学の問題で1ページより11ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号記入の指示があったら、解答用紙に受験番号と氏名を記入してください。また、解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し、さらに受験番号をマークしてください。
- (3) 解答は、所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは、絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HB または B)を使用してください。
指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は、消しゴムで丁寧に消し、消しきずを完全に取り除いたうえ、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは、横1行について1箇所に限ります。
2箇所以上マークすると採点されません。
あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
 - ⑤ 解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を、必ず読んでから解答してください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

問題 **1** の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の 内の ア から ハ に当てはまる 0 から 9 までの数字を求め、その数字を解答用マークシートの指定された行にマークせよ。また、ホ については、解答群から当てはまるものを選び、その数字を解答用マークシートの指定された行にマークせよ。ただし、(1)において、ただし、 | は 2 桁の数、 | | は 3 桁の数を表す。また、(2)において、分数は既約分数として表すものとする。 (40 点)

(1) 1 から 1000 までの整数の集合を S とする。 S の要素のうち、3 の倍数全体の集合を A 、5 の倍数全体の集合を B 、7 の倍数全体の集合を C とする。

(a) $A \cap B \cap C$ の要素の個数は ア 個である。

(b) $(A \cap B) \cup C$ の要素の個数は イ | ウ | エ 個である。

(c) 集合 S の要素のうちで、 B の要素 b と C の要素 c を選んで $b + c$ とかけるもの全体の集合を D とする。 D の要素のうち、5 で割り切れる数全体の集合を D_0 、5 で割って 1 余る数全体の集合を D_1 、5 で割って 2 余る数全体の集合を D_2 、5 で割って 3 余る数全体の集合を D_3 、5 で割って 4 余る数全体の集合を D_4 とする。 D_0 の要素で最小のものは オ | カ、 D_1 の要素で最小のものは キ | ク、 D_2 の要素で最小のものは ケ | コ、 D_3 の要素で最小のものは サ | シ、 D_4 の要素で最小のものは ス | セ である。

(d) 集合 S の要素で D に属さないものの個数は ソ | タ 個であり、そのうちで最大の要素は チ | ツ である。

(下書き用紙)

(2) a, b を正の実数とし, 円

$$C : x^2 + y^2 = 1$$

と橢円

$$E : \frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

を考える。橢円 E は、その内部(周を含む)に円 C を含んでいると仮定する。この条件の下で実数 a, b を動かすときの橢円 E の面積の最小値を求めよう。次の 2 つの場合(A), (B)のいずれかに最小値を与える橢円がある。

(A) 円 C が x 軸に関して対称な異なる 2 点で

橢円 E に内接する場合(図 1)。

このとき a, b は等式

$$b^4 - \boxed{\text{テ}} a^2 b^2 + \boxed{\text{ト}} a^2 = 0$$

を満たす。

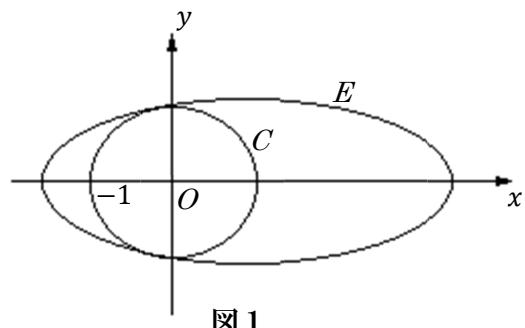


図 1

(B) 円 C が点 $(-1, 0)$ で橢円 E に内接する場合

(図 2)。このとき $a = \boxed{\text{ナ}}$ であり, b のとり

得る範囲は $b \geq \sqrt{\boxed{\text{ニ}}}$ である。

橢円 E の面積 S の最小値を求めよう。(A)の場合には,

$$S^2 = \pi^2 \frac{b \boxed{\text{ヌ}}}{b^2 - 1}$$

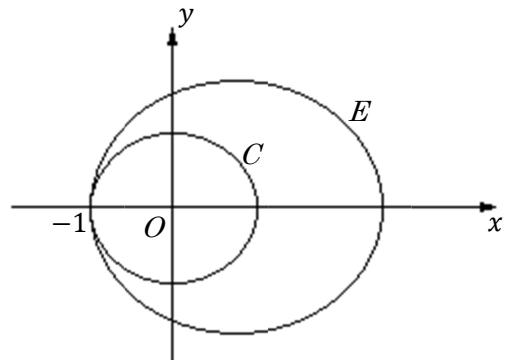


図 2

と表せるから, $a = \frac{3}{2} \sqrt{\boxed{\text{ネ}}}, b = \frac{1}{2} \sqrt{\boxed{\text{ノ}}}$ のとき S は(A)の場合の最小値

$$S_1 = \frac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}} \sqrt{\boxed{\text{フ}}} \pi$$

をとる。一方, (B)の場合の面積 S の最小値は $S_2 = 2\sqrt{\boxed{\text{ヘ}}} \pi$ である。このいずれの場合も対応する橢円が上の条件を満たしていることは容易に確かめられる。したがって, 橢円 E の面積 S の最小値は $\boxed{\text{ホ}}$ である。

$\boxed{\text{ホ}}$ の回答群

$0 \cdots S_1 \quad 1 \cdots S_2$

(下書き用紙)

問題 **2** の解答は解答用紙に記入しなさい。答だけでなく、答を導く過程も記入しなさい。

2 2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は、 $a_1 = 3$, $b_1 = 1$ および関係式

$$a_{n+1} = 4b_n + 2, \quad b_{n+1} = a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

により定義されている。以下の問いに答えよ。 (30 点)

(1) $c_n = a_n - 2b_n$, $d_n = a_n + 2b_n$ ($n = 1, 2, 3 \dots$) とおく。数列 $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ の満たす漸化式をそれぞれ求めよ。

(2) 数列 $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。

(3) $\sum_{k=1}^n c_k$, $\sum_{k=1}^n d_k$ をそれぞれ求めよ。

(4) $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$ をそれぞれ求めよ。

(5) 自然数 n に対して、不等式

$$2^n > \frac{n(n-1)}{2}$$

が成立することを示せ。

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{2n}}{B_{2n}}$ を求めよ。

(下書き用紙)

問題 **3** の解答は解答用紙に記入しなさい。答だけでなく、答を導く過程も記入しなさい。

3 関数 $f(x) = x^3 + x^2 - 3x$ を考える。以下の問いに答えよ。 (30 点)

- (1) 関数 $y = f(x)$ の極値をとる x の値および $y = f(x)$ のグラフの変曲点を求めよ(答のみでいい)。
- (2) $y = f(x)$ のグラフの概形を描け。
- (3) s を与えられた実数とする。直線 $y = f(s)$ と曲線 $y = f(x)$ が異なる 3 点で交わるような実数 s の範囲を求めよ。
- (4) s が(3)で定まる範囲にあるとき、直線 $y = f(s)$ と曲線 $y = f(x)$ の 3 交点を $Q(a, f(a))$, $R(s, f(s))$, $S(b, f(b))$ とする。ただし、 $a < s < b$ と仮定する。実数 p を、 $s = p$ のとき R が線分 QS を $2:1$ に内分するように選ぶ。 p を決定せよ。

- (5) (4)で決めた a, b, p に対し、

$$\int_a^b (f(x) - f(p)) dx$$

を求めよ。

(下書き用紙)