2006 年度

〔試験時間　100 分〕

数　　　学

この冊子は，数学の問題で１ページより 13 ページまであります。

〔注　　　意〕

（1） 試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

（2） 監督者から受験番号記入の指示があったら，解答用紙に受験番号と氏名を記入してください。また，解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し，さらに受験番号をマークしてください。

（3） 解答は，所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

（4） 解答用マークシートについて

① 解答用マークシートは，絶対に折り曲げてはいけません。

② マークには黒鉛筆(HB または B)を使用してください。
指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③ 誤ってマークした場合は，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④ 解答欄のマークは，横１行について１箇所に限ります。
２箇所以上マークすると採点されません。
あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

⑤ 解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を，必ず読んでから解答してください。

（5） 試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

（6） 問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

（下書き用紙）

（下書き用紙）

問題 $\boxed{1}$ の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

$\boxed{1}$ 次の$\boxed{}$内の **ア** から **ヨ** に当てはまる 0 から 9 までの数字を求め，その数字を解答用マークシートの指定された行にマークせよ。ただし，$\boxed{|}$は 2 桁の整数であり，分数における分母と分子は，1 以外の公約数をもたないものとする。
また，$\boxed{}$内の **あ** から **う** については， **真** または **偽** のうち当てはまる方を，解答用マークシートの指定された行にマークせよ。（45 点）

(1) サイコロを 3 回まで投げることができる。2 回目を投げるかどうかは 1 回目に出た目によって決め，3 回目を投げるかどうかは 2 回目に出た目によって決める。1 回目に出た目によって 2 回目を投げないことに決めた場合は，1 回目に出た目をそのまま得点とし，2 回で投げるのをやめた場合は，2 回目に出た目を，3 回投げた場合は 3 回目に出た目をそれぞれ得点とする。

(a) 1 回目に 3 以下の目が出たときは 2 回目を投げるが，4 以上の目が出たときは，ここで投げるのをやめる。2 回目も再び 3 以下の目が出たときだけ，3 回目を投げることにする。この場合，得点が 3 以下となる確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。

(b) 1 回目に 4 以下の目が出たときは 2 回目を投げるが，5 以上の目が出たときは，ここで投げるのをやめる。2 回目も再び 4 以下の目が出たときだけ，3 回目を投げることにする。この場合，得点が 3 または 4 となる確率は $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ|オ}}$ である。

(c) (b)の場合に，得点が 6 となる確率は $\dfrac{\boxed{カ|キ}}{\boxed{ク|ケ}}$ である。

（下書き用紙）

(2) 正の実数 a に対し，x の 2 次関数 $f_a(x) = x^2 - 2\sqrt{a}x + 2a + \frac{1}{a} - 3$ が定められている。

(a) a が正の範囲を動くとき，放物線 $y = f_a(x)$ の頂点 P は，

曲線 $y = x^{\boxed{コ}} + \frac{1}{x^{\boxed{サ}}} - \boxed{シ}$ の x 座標が正である部分を動く。このことから，頂点 P の y 座標の最小値が $-\boxed{ス}$ であることが分かる。

(b) すべての正の実数a に対して $f_a(k\sqrt{a}) > 0$ が成り立つような正の整数 k のうち最小のものは $\boxed{セ}$ である。

(c) $f_a(0) \leqq 0$ となるような，a の値の範囲は $\frac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}} \leqq a \leqq \boxed{チ}$ である。

(d) 次の(ⅰ)から(ⅲ)のそれぞれの命題について，真偽を調べると次のようになる。

(ⅰ) 命題「すべての正の実数 a とすべての実数 x に対して，$f_a(x) > 0$ である」は $\boxed{あ}$ である。

(ⅱ) 命題「どんな正の実数 a に対しても，ある実数 x をとると $f_a(x) > 0$ である」は $\boxed{い}$ である。

(ⅲ) 命題「ある実数 x に対して，正の実数 a をどのようにとっても $f_a(x) > 0$ である」は $\boxed{う}$ である。

（下書き用紙）

(3)　t を媒介変数として

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}\cos t \\ y = \sin t + \dfrac{1}{3}\cos 2t \end{cases}$$

で表される座標平面上の点 $\mathrm{P}(x\,,\ y)$ が描く曲線 C を考える。

最初に，媒介変数 t の値が $\pi \leqq t \leqq 2\pi$ の範囲を動く場合に，y の増減を調べることにより，この場合 y の値は $-\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}} \leqq y \leqq \dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ の範囲を動くことが分かる。

次に，媒介変数 t の値が $0 \leqq t \leqq \pi$ の範囲を動く場合に，y の増減を調べることにより，この場合 y の値は $\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}} \leqq y \leqq \dfrac{\boxed{\text{ネ}}\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}\boxed{\text{ヒ}}}$ の範囲を動くことが分かり，このときさらに x の値の変化を調べることで，曲線 C 上の点で y 座標の値が最大となるような点は $\boxed{\text{フ}}$ 個あり，これらの点の x 座標のうち，最も値が大きいものは $\dfrac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}}\sqrt{\boxed{\text{マ}}}$ であることが分かる。

媒介変数 t の値がこれらの 2 つの範囲にある場合のそれぞれについて，y および x の値の変化を調べることによって，直線 $y = a$ と曲線 C との共有点の数は，a の値が $\dfrac{\boxed{\text{ミ}}}{\boxed{\text{ム}}} < a < \dfrac{\boxed{\text{メ}}\boxed{\text{モ}}}{\boxed{\text{ヤ}}\boxed{\text{ユ}}}$ の範囲にあるとき $\boxed{\text{ヨ}}$ 個となり，最も多くなることが分かる。

（下書き用紙）

問題 $\boxed{2}$ の解答は解答用紙に記入しなさい。答だけでなく，答を導く過程も記入しなさい。

$\boxed{2}$ 座標平面上に，中心の x 座標が正であり半径が a の円 C_1 と，中心の y 座標が正であり半径が b の円 C_2 がある。円 C_1 は y 軸に接し，円 C_2 は x 軸に接し，さらにこれらの円は外接している。ただし，a と b は正の定数である。2 つの円 C_1 , C_2 が，これらの条件をすべて満たしながら動くとする。以下の問いに答えよ。 (25 点)

(1) 円 C_1 と円 C_2 の接点 $\mathrm{P}(x\,,\ y)$ の軌跡の方程式を求めよ。

(2) (1)で求めた接点 P の軌跡が描く曲線によって囲まれる図形の面積を，積分を計算することにより求めよ。

（下書き用紙）

問題 $\boxed{3}$ の解答は解答用紙に記入しなさい。答だけでなく，答を導く過程も記入しなさい。

$\boxed{3}$ $m < n$ を満たす自然数 $m\,,n$ の組に対して，実数 $a\,,b\,,c$ を係数にもつ 3 次式 $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が, $x^2 + 1$ で割ったときの余りが $(mn - 1)x + m + n$ であり，かつ $x^2 - 1$ で割ったときの余りが $(mn + 1)x - (m + n)$ であるように定められている。以下の問いに答えよ。 （30 点）

(1) $a\,,b\,,c$ を $m\,,n$ の式で表せ。

(2) $P(x) = 0$ の解を $m\,,n$ の式で表せ。

(3) 曲線 $y = P(x)$ と x 軸によって囲まれる図形のうち，x 軸の上側にある部分の面積を S とおき，x 軸の下側にある部分の面積を T とおく。S と T がともに整数であるとき，$m\,,n$ はともに偶数であることを証明せよ。

(4) S と T がともに整数であるための必要十分条件を，$m = 2k$ を満たす整数 k と $n = 2l$ を満たす整数 l の和 $k + l$ に関する条件として述べよ。

(5) S と T がともに整数となり，かつ不等式 $S + T \leqq 240$ が満たされるような自然数 $m\,,n$ の組のとり方をすべて求めよ。

（下書き用紙）