2005年度

〔試験時間　100分〕

数　　学

この冊子は，数学の問題で１ページより11ページまであります。

〔注　　意〕

（1）試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

（2）監督者から受験番号記入の指示があったら，解答用紙に受験番号と氏名を記入してください。また，解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し，さらに受験番号をマークしてください。

（3）解答は，所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

（4）解答用マークシートについて

① 解答用マークシートは，絶対に折り曲げてはいけません。

② マークには黒鉛筆(HB または B)を使用してください。
指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③ 誤ってマークした場合は，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④ 解答欄のマークは，横１行について１箇所に限ります。
２箇所以上マークすると採点されません。
あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

⑤ 解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を，必ず読んでから解答してください。

（5）試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

（6）問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

（下書き用紙）

（下書き用紙）

問題 $\boxed{1}$ の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

$\boxed{1}$ 次の(1)〜(3)において，$\boxed{}$内のカタカナおよびひらがなに当てはまる 0 から 9 までの数字を求め，その数字を解答用マークシートにマークせよ。ただし，$\boxed{|}$は 1 桁または 2 桁の数を表すものとする。また，分数における分母と分子は，1 以外の公約数をもたないものとする。

(1)　行列

(2)　i は虚数単位とし，$(i^2=-1)$，$\beta=\cos\frac{2\pi}{5}+i\ \sin\frac{2\pi}{5}$ とすると，

$\beta^{\boxed{テ}}-1=0$ より，(ただし $\boxed{テ}\neq 0$)

$$\beta^4+\beta^3+\boxed{ト}\beta^2+\beta+1=0$$

である。これより，

$$\beta^2+\beta+\boxed{ナ}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta^2}=0$$

が得られ，

$$\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)^2+\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)-\boxed{ニ}=0\ \cdots\cdots ①$$

となる。さて，

$$\frac{1}{\beta}=\boxed{ヌ}\cos\frac{2\pi}{5}-i\left(\boxed{ネ}\sin\frac{2\pi}{5}\right)$$

であるから，$\beta+\frac{1}{\beta}$ は正の実数である。ゆえに①より，

$$\beta+\frac{1}{\beta}=\frac{-\boxed{ノ}+\sqrt{\boxed{ハ}}}{\boxed{ヒ}}$$

となり，

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-\boxed{フ}+\sqrt{\boxed{ヘ}}}{\boxed{ホ}}$$

が得られる。

（下書き用紙）

(3) a, b を正の定数とし，xy 平面上の楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ を C で表す。C 上に 3 頂点をもち，1 辺が x 軸に平行な正三角形は 2 つ存在する。そのうち 1 つの正三角形の 3 頂点は，ある実数 u, v により, $(-u,\ v)$, $(0,\ b)$, $(u,\ v)$ のように表される。ただし $0<u\leqq a$, $-b<v<b$ である。

この 3 点が C 上にあるという条件と，正三角形の頂点であるという条件は，

$$\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}=1,\quad \boxed{\text{マ}}u^2=u^2+(b-v)^2$$

と表される。これを解くと，

$$v=\frac{-\boxed{\text{ミ}}a^{\boxed{\text{ム}}}b^{\boxed{\text{メ}}}+b^{\boxed{\text{モ}}}}{\boxed{\text{ヤ}}a^2+\boxed{\text{ユ}}b^2},\quad u=\frac{\boxed{\text{ヨ}}\sqrt{\boxed{\text{ラ}}}a^{\boxed{\text{リ}}}b^{\boxed{\text{ル}}}}{\boxed{\text{ヤ}}a^2+\boxed{\text{ユ}}b^2}$$

である。

もうひとつの正三角形の C 上にある頂点を P_1, P_2, P_3 とし, 辺 P_1P_2 が x 軸に平行とすると，P_1, P_2 の座標はそれぞれ $(-u',\ v')$, $(u',\ v')$ としてよい。ただし $0<u'\leqq a$, $-b<v'<b$ である。このとき，

$$v'=\frac{\boxed{\text{レ}}a^{\boxed{\text{ロ}}}b^{\boxed{\text{あ}}}b^{\boxed{\text{い}}}}{\boxed{\text{う}}a^2+\boxed{\text{え}}b^2},\quad u'=\frac{\boxed{\text{お}}\sqrt{\boxed{\text{か}}}a^{\boxed{\text{き}}}b^{\boxed{\text{く}}}}{\boxed{\text{う}}a^2+\boxed{\text{え}}b^2}$$

である。

（下書き用紙）

問題 $\boxed{2}$ の解答は解答用紙に記入しなさい。答だけでなく，答を導く過程も記入しなさい。

$\boxed{2}$ $t\,,u\,,a\,,b\,,r\ (r>0)$ は実数とする。円C の方程式は $(x-a)^2+\ (y-b)^2=r^2$ とし，点 P($t\,,u$)は円C 上の点とする(ただし $u\neq b$)。

⑴　点 P($t\,,u$)における円C の $\frac{dy}{dx}$ の値, $\frac{d^2y}{dx^2}$ の値を，$t\,,u\,,a\,,b\,,r$ で表せ。

注意：$g(x)=b-\sqrt{r^2-(x-a)^2}\ \ (a-r<x<a+r)$,
$h(x)=b+\sqrt{r^2-(x-a)^2}\ \ (a-r<x<a+r)$
とするとき，$y=g(x)$ のグラフは円C
の下側の部分 C_1 を表し，$y=h(x)$ のグラフは円C の上部の部分 C_2 を表す。例えば点 P($t\,,u$)が C_1 上にあるとき $(b-r\leqq u<b)$, 点 P($t\,,u$)における円C の $\frac{dy}{dx}$ の値, $\frac{d^2y}{dx^2}$ の値とは，それぞれ $g'(t)$, $g''(t)$ のことである。

⑵　$f(x)=e^x$ とする(e は自然数の底)，点 P($t\,,u$)が曲線 $y=f(x)$ 上にあり，$(u=e^t\neq b)$，かつ点 P $(t\,,\ e^t)$ における円C の$\frac{dy}{dx}$ の値, $\frac{d^2y}{dx^2}$ の値がそれぞれ$f'(t)$, $f''(t)$に等しいとする。このとき，$a\,,b\,,r$ を t の式で表せ。

⑶　⑵の条件のもとで，t がすべての実数を動くときの r の最小値と，r を最小にする t の値を求めよ。

（下書き用紙）

問題 $\boxed{3}$ の解答は解答用紙に記入しなさい。答だけでなく，答を導く過程も記入しなさい。

$\boxed{3}$

$$\text{直線 } l_m：y = mx$$
$$\text{と曲線 } C_m：y = \sin x \ \left(0 \leqq x \leqq \pi\right)$$

について次の問に答えよ。ただし m は自然数とする　。

(1)　曲線 C_m 上の点 $\mathrm{P}(t\,,\ mt + \sin t)$ を通り直線 l_m に垂直な直線が，l_m と交わる点を H とする。

(a)　PH の長さを求めよ。

(b)　OH の長さを求めよ。ただし O は原点とする。

(2)　直線 l_m と曲線 C_m で囲まれる図形を，直線 l_m のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V_m を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{m\to\infty} m^2\,(V_m - V_{m+1})$　を求めよ。

（下書き用紙）