

数 学

この冊子は、数学の問題で1ページより13ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号記入の指示があったら、解答用紙に受験番号と氏名を記入してください。また、解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し、さらに受験番号をマークしてください。
- (3) 解答は、所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは、絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HB または B)を使用してください。
指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は、消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取除いたうえで、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは、横1行について1箇所に限ります。
2箇所以上マークすると採点されません。
あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
 - ⑤ 解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を、必ず読んでから解答してください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

問題 **1** の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の(1)~(3)において、内のカタカナに当てはまる0から9までの数字を求め、その数字を解答用マークシートにマークせよ。ただし、|は2桁の数を表すものとする。また、分数は既約分数として表すものとする。

- (1) i を虚数単位とし、 $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とする。このとき、自然数 n を ア で割った余りが イ ならば $(1+\omega)^n = \omega$ であり、 n を ア で割った余りが ウ ならば $(1+\omega)^n = -\omega$ となる。

(下書き用紙)

(2) $t \geq 0$ とするとき、座標平面において点 P が放物線 $y = x^2$ 上を動くときの、点 P と点 $(0, t)$ との距離の 2 乗の最小値を $f(t)$ とする。このとき $f(1) = \frac{\text{エ}}{\text{オ}}$ である。また、曲線 $y = f(x)$ と、 y 軸および直線 $y = 1$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積は $\pi \times \frac{\text{カ} \mid \text{キ}}{\text{ク} \mid \text{ケ}}$ となる。

(下書き用紙)

(3) 3次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 3$ の係数 a, b, c は1から9までの自然数であるとする。このとき $f'(x)$ を $f(x)$ の導関数として、 x の2次方程式 $f'(x) = 0$ の解がすべて整数であるような a, b, c の組は全部で 個ある。またそれらのうちで、 x の3次方程式 $f(x) = f'(x)$ の解がすべて整数であるのは $a =$, $b =$, $c =$ という組である。

(下書き用紙)

問題 **2** の解答は解答用紙に記入しなさい。答だけでなく、答を導く過程も記入しなさい。

2 関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ のグラフを C とし、 C 上の互いに相異なる点の列 $\{P_n\}$ が次の条件(*)をみたすように定められている：

(*) 点 P_1 は原点 $O(0, 0)$ とは異なり、点 P_1 における C の接線は原点 O を通る。
 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して点 P_{n+1} における C の接線は P_n を通る。

また、点 P_n の x 座標を x_n とし、直線 $P_n P_{n+1}$ と曲線 C で囲まれた部分の面積を S_n とする。
このとき次の問に答えよ。

- (1) x_1 を求めよ。
- (2) x_{n+1} を x_n の式で表せ。
- (3) x_n を n の式で表せ。
- (4) a, b を定数とするとき、一般に次の等式が成り立つことを、左辺に部分積分法を用いることで、証明せよ。

$$\int_a^b (x-b)^2 (x-a) dx = \frac{1}{12} (a-b)^4$$

- (5) S_n を n の式で表せ。

(下書き用紙)

問題 **3** の解答は解答用紙に記入しなさい。答だけでなく、答を導く過程も記入しなさい。

3 座標空間において、原点 $(0, 0, 0)$ を中心とし、 xy 平面に含まれる半径 1 の円 C を考える。そして、 xy 平面の上側に、この円 C を底面とする高さ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ の直円柱 D を考える。また、点 $(-1, 0, 0)$ を通り、 y 軸に平行な直線を l とする。直線 l を含み、 xy 平面と 30° で交わる平面 α により、この直円柱 D が二つの部分に分けられているとする。このとき、これらの部分のうち、 α の下側の部分を M として次の間に答えよ。

(1) 点 $(s, 0, 0)$ (ただし、 $-1 < s < 1$) を通り、 yz 平面に平行な平面と、 M との共通部分は長方形となるが、その面積を s を用いて表せ。

(2) 立体 M の体積を求めよ。

(下書き用紙)