2003 年度　〔試験時間　100 分〕

数　　　学

この冊子は，数学の問題で１ページより 15 ページまであります。

〔注　　　意〕

（1）　試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

（2）　監督者から受験番号記入の指示があったら，解答用紙に受験番号と氏名を記入してください。また，解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し，さらに受験番号をマークしてください。

（3）　解答は，所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

（4）　解答用マークシートについて

①　解答用マークシートは，絶対に折り曲げてはいけません。

②　マークには黒鉛筆(HB または B)を使用してください。
指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③　誤ってマークした場合は，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④　解答欄のマークは，横１行について１箇所に限ります。
２箇所以上マークすると採点されません。
あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

⑤　解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を，必ず読んでから解答してください。

（5）　試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

（6）　問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

（下書き用紙）

（下書き用紙）

問題 $\boxed{1}$ の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

$\boxed{1}$ 次の(1)〜(4)において，$\boxed{}$内のカタカナに当てはまる 0 から 9 までの数字を求めて，その数字を解答用マークシートにマークせよ。ただし，$\boxed{}$は 1 桁の数，$\boxed{|}$は 2 桁の数を表す。また，分数は既約分数として表すものとする。

(1)　中心間の距離が 2 であるような半径 1 の球と半径 2 の球がる。これらの球の表面の交わりは $\dfrac{\sqrt{\boxed{アイ}}}{4}$ の円になり，これらの球の重なった部分の体積は $\dfrac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オカ}}\pi$ となる。

（下書き用紙）

⑵　空間において，1 辺の長さ 1 の正四面体 OABC がある。底面の三角形 ABC 内に点 P があり，内積についての条件 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=\frac{5}{8}$，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{3}{4}$

を満たしているとする。このとき，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\overrightarrow{OA}+\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\overrightarrow{OB}+\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}\overrightarrow{OC}$$

となるので，線分 OP の長さは $\frac{\sqrt{\boxed{スセ}}}{4}$ となる。また，2 点 A，P を通る直線と線分 BC の交点を Q とするとき，$\frac{BQ}{CQ}=\frac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}$ となる。

（下書き用紙）

(3) 整数 $f(x)$，$g(x)$ が

$$f(x) = a_{44}x^{44} + a_{43}x^{43} + \cdots + a_1 x + a_0 \ ,$$
$$g(x) = b_{18}x^{18} + b_{17}x^{17} + \cdots + b_1 x + b_0$$

で与えられているとき，それらの積 $f(x)\,g(x)$ は

$$f(x)\,g(x) = c_{62}x^{62} + c_{61}x^{61} + \cdots + c_1 x + c_0$$

と表すことができる。

x^n の係数 c_n $(n = 0\,, 1\,, \ldots, 62)$ は，$a_i b_j$ の形の項の和で表される。その項数を T_n とする。
T_n が最大となるような n の値は $\boxed{\text{チ}\ |\ \text{ツ}}$ 通りあり，T_n の最大値は
$\boxed{\text{テ}\ |\ \text{ト}}$ である。

（下書き用紙）

(4)　半径 4 の円 C の周上に中心をもつ半径 r の n 個の円 C_1，C_2，……，C_n が，この順に外接してすき間なく並んでいるとする。したがって，C_n と C_1 も外接している。$n=12$のとき，

$r=\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}-\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}$ である。

C_1，C_2，……，C_n の円周の長さの和を L_n とするとき，

$\lim_{n\to\infty} L_n = \boxed{\text{ヌ}}\pi^{\boxed{\text{ネ}}}$ となる。

（下書き用紙）

問題 $\boxed{2}$ の解答は解答用紙に記入しなさい。答だけでなく，答を導く過程も記入しなさい。

$\boxed{2}$

$$関数\quad f(x) = \frac{x}{2} + \frac{5}{2x}\ \left(x > 0\right)$$

について次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) (a) $a_1 = 3$，$a_{n+1} = f(a_n)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ について，

$$a_{n+1} - \sqrt{5} \geqq \frac{1}{2}\left(a_n - \sqrt{5}\right)\ (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

が成り立つことを示せ。

(b) 極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

(3)

$$b_1 = 1, \qquad b_{n+1} = \frac{1}{2} - f'(b_n)\ (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

によって定義される数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。ただし，$f'(x)$は $f(x)$ の導関数である。

（下書き用紙）

問題 $\boxed{3}$ の解答は解答用紙に記入しなさい。答だけでなく，答を導く過程も記入しなさい。

$\boxed{3}$ 2 つの曲線

$$C_1: y = e^{-(x-a)^2} \quad , \quad C_2: y = \frac{2}{\sqrt{e}} \sin \frac{\sqrt{2}\pi x}{4}$$

について次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底，a は定数である。

(1) 曲線 C_1 の接線で点$(-1\,,0)$を通るものの本数を調べよ。

(2) 曲線 C_1 の変曲点は 2 つある。それらの点の x 座標を求めよ。

(3) 曲線 C_1 の 2 つの変曲点における接線のうち，傾きが正のものを l とする。l が原点を通るように定数 a の値を求め，l の方程式を求めよ。

(4) (3)で定めた接線 l と曲線 C_2 との交点を求めよ。

(5) (3)で定めた接線 l と曲線 C_2 で囲まれる部分の面積を求めよ。

（下書き用紙）