2001年度

〔試験時間　100分〕

数　　学

この冊子は，数学の問題で１ページより11ページまであります。

〔注　　意〕

（1）試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

（2）監督者から受験番号記入の指示があったら，解答用紙に受験番号と氏名を記入してください。また，解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し，さらに受験番号をマークしてください。

（3）解答は，所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

（4）解答用マークシートについて

①　解答用マークシートは，絶対に折り曲げてはいけません。

②　マークには黒鉛筆(HB または B)を使用してください。
　　指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③　誤ってマークした場合は，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④　解答欄のマークは，横１行について１箇所に限ります。
　　２箇所以上マークすると採点されません。
　　あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

⑤　解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を，必ず読んでから解答してください。

（5）試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

（6）問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

（下書き用紙）

（下書き用紙）

問題 $\boxed{1}$ の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

$\boxed{1}$ 次の(1), (2)において, $\boxed{}$ に当てはまる正の整数を求めよ。そして, $\boxed{}$ 内のカタカナに当てはまる 0 から 9 までの数字をそれぞれ解答用マークシートにマークせよ。ただし, 分数は既約分数として表すことにする。

(1) 1 辺の長さが 1 の正 6 角形の頂点に, 1 から 6 までの番号を 1 つずつふる。そして, 番号 1 から番号 6 までの頂点について, 1 つ違いの場合をもつ頂点どうしを線分でむすび, さらに番号 6 の頂点と番号 1 の頂点を線分でむすび, 合計 6 本の線分を作る。このとき, 6 本の線分の長さの総和は, 負でない整数 a, b を用いて, $a + b\sqrt{3}$ と表される.
例えば, 反時計回りに 1, 6, 2, 4, 3, 5 という順あるいは 1, 6, 2, 5, 3, 4 という順で番号がふられた場合, 線分の長さの総和はともに $2 + 4\sqrt{3}$ である。

(a) b がとり得るもっとも大きい値は $\boxed{ア}$ である。

(b) b の値が 0 であり, 長さ 2 の線分が 3 本現れる確率は $\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}\boxed{エ}}$ である。b の値が 0 であり, 長さ 2 の線分が 2 本現れる確率は $\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}\boxed{キ}}$ である。これらに, b の値が 0 であり, 長さ 2 の線分が現れない確率を加えて, b の値が 0 である確率 $\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}\boxed{コ}}$ を得る。

(c) b の値がもっとも大きい値であり, 長さ 2 の線分が現れない確率は $\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}\boxed{ス}}$ であることがわかる。この確率に, b の値がもっとも大きく長さ 2 の線分が 2 本現れる確率を加えることにより, b の値がもっとも大きい値をとる確率 $\dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}\boxed{タ}}$ を得る。

（下書き用紙）

(2) $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, $\{w_n\}$ は，一般項が正の数である等比数列とする。

(a) $\{x_n\}$ は初項 $\frac{3}{4}$ で公比 $\frac{3}{5}$

$\{y_n\}$ は初項 $\frac{4}{5}$ で公比 $\frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}$

$\{z_n\}$ は初項 $\frac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}$ で公比 $\frac{2}{5}$

とすると，各自然数 n に対して

$$\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}=\frac{1}{c_n}, \qquad (x_n)^{a_n}=(y_n)^{b_n}=(z_n)^{c_n}$$

という式が同時に成立するような 0 ではない実数 a_n, b_n, c_n が存在する。

(b) (a)の $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ に対して，$\{w_n\}$ が初項 $\frac{3}{5}$ で公比 $\frac{\boxed{ナ\,|\,ニ}}{\boxed{ヌ\,|\,ネ}}$ ならば，

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=\frac{1}{f}, \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right)^d=\left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n\right)^e=\left(\sum_{n=1}^{\infty} w_n\right)^f$$

という式が同時に成立するような 0 ではない実数 d, e, f が存在する。

（下書き用紙）

問題 $\boxed{2}$ の解答は解答用紙に記入しなさい。答だけでなく、答を導く過程も記入しなさい。

$\boxed{2}$ 座標平面上の曲線

$$C_1 : y^2 = 26 - 19(e^x + e^{-x}) + 7(e^{2x} + e^{-2x}) - (e^{3x} + e^{-3x})$$

と曲線 $C_2 : y^2 = 4(x^2 - 2x^3)$
が与えられている。ただし，$x \geqq 0$ とする。

⑴　曲線 C_2 上の点 P における接線が x 軸と平行になるとき，P の座標を求めよ。

⑵

$$t = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1$$

とおく。点 (x, y) が曲線 C_1 上にあるとき，y^2 を t の式で表せ。

⑶　曲線 C_1 と x 軸との交点の x 座標の値を α とする。$\frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$ の値をすべて求めよ。

⑷　曲線 C_1 で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

（下書き用紙）

問題 $\boxed{3}$ の解答は解答用紙に記入しなさい。答だけでなく、答を導く過程も記入しなさい。

$\boxed{3}$ 複素数平面状の点 z と点 $w=\dfrac{z\cos\theta+\sin\theta}{-z\sin\theta+\cos\theta}$ を考える。

ただし，$z\neq\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ とし，(1)と(2)においては，θ は $0<\theta<\pi$ をみたす定数とする。

(1) $w=z$ となる複素数 z をすべて求めよ。

以下の問題では，点 w の描く図形は，w の実部を u，虚部を v として，u と v を用いて，図形の特徴が分かるように整理したもので答えよ。

(2) z が，虚部が 1 であるように動くとき，点 w の描く図形を求めよ。

(3) $z=2i$ とする。θ が $0<\theta<\pi$ をみたす範囲を動くとき，点 w の描く図形を求めよ。

（下書き用紙）