2000 年度

〔試験時間　100 分〕

数　　　学

この冊子は，数学の問題で１ページより 13 ページまであります。

〔注　　　意〕

（1）　試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

（2）　監督者から受験番号記入の指示があったら，解答用紙に受験番号と氏名を記入してください。また，解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し，さらに受験番号をマークしてください。

（3）　解答は，所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

（4）　解答用マークシートについて

①　解答用マークシートは，絶対に折り曲げてはいけません。

②　マークには黒鉛筆(HB または B)を使用してください。
指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③　誤ってマークした場合は，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④　解答欄のマークは，横１行について１箇所に限ります。
２箇所以上マークすると採点されません。
あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

⑤　解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を，必ず読んでから解答してください。

（5）　試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

（6）　問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

（下書き用紙）

（下書き用紙）

問題 $\boxed{1}$ の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

$\boxed{1}$ 次の問題(1)と(2)において，$\boxed{}$内の(ア)から(マ)に当てはまる 0 から 9 までの数字を求めて，それを解答用マークシートの指定された行にマークせよ。ただし，$\boxed{}$は 1 桁の数，$\boxed{|}$は 2 桁の数，$\boxed{||}$は 3 桁の数，$\boxed{|||}$は 4 桁の数を表す。(0 は 1 桁の数とみなす。)

(1) O を原点とする座標平面において， A(8 , 0)は定点， P(x , y)は動点とする。

(a) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = 8$ を満たす点 P(x , y)の軌跡C_1 を表す方程式は，

$$x^2 - \boxed{\text{ア}\,|\,\text{イ}}\,x + \boxed{\text{ウ}}\,y^2 + \boxed{\text{エ}}\,y = 0$$

である。

(b) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = -64$ を満たす点 P(x , y)の軌跡C_2 を表す方程式は，

$$x + \boxed{\text{オ}}\,y + \boxed{\text{カ}} = 0$$

である。

（下書き用紙）

(c) C_1 と C_2 の両方に接する円は 2 つの種類に分けられる。第 1 の種類の円の内部には，C_1の点が全く存在せず，第 2 の種類の円の内部には，C_1 の点が存在する。

第 1 の種類の円の中心 $\mathrm{P}(x, y)$の軌跡 C_3 は放物線である。

その焦点の座標は($\boxed{キ}$, $\boxed{ク}$)，準線は

$$x + \boxed{ケ}\,y + \boxed{コ\,|\,サ} = 0$$

で，C_3 を表す方程式は

$$y^2 - \boxed{シ\,|\,ス}\,x - \boxed{セ\,|\,ソ\,|\,タ} = 0$$

である。

また C_3 の方程式を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を用いて書くと，

$$\boxed{チ}\,\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \boxed{ツ\,|\,テ\,|\,ト}$$

である。

第 2 の種類の円の中心 $\mathrm{P}(x, y)$の軌跡 C_4 を表す方程式は，

$y^2 - \boxed{ナ\,|\,ニ}\,x + \boxed{ヌ\,|\,ネ} = 0$ である。

（下書き用紙）

⑵　サイコロは正 6 面体の各面に 1 から 6 までの数を 1 つずつ書き込んだものである。通常のサイコロでは，中心に関して対象の位置にある 2 つの面の数の和が 7 になるようにしてある。したがって，サイコロを転がして 1 が底面にあるように置けば，6 は上面にくる。さらに，1 が底面にあるようにしたまま適当に回転すれば，2 が正面にあるようにすることができる。このとき，3 の面が左にあるか，右にあるかを指定すれば，他の面の数は定まる。すなわち，正 6 面体の各面に 1 から 6 までの数字を書き込み，対称面に書かれてある数の和が 7 であるようにする書き方は，ちょうど 2 通りある。

　さて，この考え方にならって，正n面体のn個の面に 1 からnまでの数を 1 つずつ書く相異なる書き方がいくつあるかを考察すると，正 4 面体については$\boxed{\text{ノ}}$通り，正 6 面体については$\boxed{\text{ハ}\mid\text{ヒ}}$通り，正 8 面体については$\boxed{\text{フ}\mid\text{ヘ}\mid\text{ホ}\mid\text{マ}}$通りあることが分かる。（正$n$面体を転がしたり，回転したりすることにより同じになる数字の書き方は，同じ書き方とみなす。言い換えれば，各面に書かれる数の，互いの位置関係が同じものは同じ書き方とみなす。）

（下書き用紙）

問題 $\boxed{2}$ の解答は解答用紙に記入しなさい。答だけでなく、答を導く過程も記入しなさい。

$\boxed{2}$ **方程式 $y^2 = x^3 - x$ が表す曲線Cを考察する。**

(1) **関数 $y = \sqrt{x^3 - x}$ について，次を求めよ。**

(a) **xのとり得る値の範囲(定義域)**

(b) **この関数が極大になるxの値**

(c) **この関数のグラフの変曲点のx座標**

(求める答は，例えば $\sqrt{\frac{5+3\sqrt{7}}{2}}$ のように，根号を二重に含む数である。)

(2) **曲線C について次を求めよ。**

(a) **C と x 軸の交点の座標**

(b) **y 軸に平行な C の接線**

(3) **曲線Cの概形をかけ。**

(4) **曲線 C 上の点 P (a, b) $(b > 0)$ における接線を l_a で表し，l_a と C の共有点を P(a, b), Q(r, s)とする。ただし，l_a と C の共有点が P(a, b)のみのときは，P$(a, b) =$ Q(r, s)とする。このとき，r は a の関数となるので，$r = g(a)$ とおく。**

(a) **$g(a)$ を求めよ。**
(ヒント：l_a とC の共有点のx 座標が満たす方程式において，$x = a$ は重解となっている。)

(b) **点 P (a, b) $(b > 0)$ が C 上を動くとき，$g(a)$ のとり得る値の範囲を求めよ。**
(ヒント：曲線 C の概形と関数$g(a)$ の形から，$g(a)$ のとり得る値の範囲を求めることができる。すなわち，$g'(a)$ を求めなくても答を得ることができる。)

（下書き用紙）

問題 $\boxed{3}$ の解答は解答用紙に記入しなさい。答だけでなく、答を導く過程も記入しなさい。

$\boxed{3}$ 最上部まで石油がつまった半径 10mの球形の石油タンクで事故が発生し，最低部に穴があいて石油が流出しはじめた。単位時間あたりの流出量は，底から油面までの高さの平方根に比例するという。事故発生からちょうど一日で半分石油が流出した。このまま放置したときどれだけの時間ですべての石油が流出するか，次のようにして推定せよ。

(1) 油面の高さをz mとするとき，残っている石油の体積V ㎥を求めよ。

(2) 事故発生後の経過時間をt日とする。上ではVをzの関数として表したが，Vをtの関数とみたとき，$\dfrac{dV}{dt} = -kz^{\frac{1}{2}}$ という関係が成り立つ。この比例定数kが分かっているものとして，合成関数の微分の公式を用いて，tをzの関数とみなしたときの導関数 $\dfrac{dt}{dz}$ を求めよ。

(3) tを，kを含んだ形で，zの関数として表せ。

(4) 事故発生から約何日何時間後にすべての石油が流出するか。
ただし，$\sqrt{2} = 1.41$ とする。(時間は，小数第1位で四捨五入して整数値で答えよ。)

（下書き用紙）