1999 年度　〔試験時間　100 分〕

数　　学

この冊子は，数学の問題で１ページより 15 ページまであります。

〔注　　意〕

（1） 試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

（2） 監督者から受験番号記入の指示があったら，解答用紙に受験番号と氏名を記入してください。また，解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し，さらに受験番号をマークしてください。

（3） 解答は，所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

（4） 解答用マークシートについて

① 解答用マークシートは，絶対に折り曲げてはいけません。

② マークには黒鉛筆(HB または B)を使用してください。
指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③ 誤ってマークした場合は，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④ 解答欄のマークは，横１行について１箇所に限ります。
２箇所以上マークすると採点されません。
あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

⑤ 解答用マークシートに記載されている解答上の注意事項を，必ず読んでから解答してください。

（5） 試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

（6） 問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

（下書き用紙）

（下書き用紙）

問題 $\boxed{1}$ の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

$\boxed{1}$ 次の(1)～(4)において、(ア)から(ヒ)の$\boxed{}$に当てはまる0から9までの整数を求めて、解答用マークシートの指定された列にあるその数をマークせよ。ただし、分数は既約分数として表すものとする。また、$\boxed{}$は1桁の数、$\boxed{|}$は2桁の数である。

(1) eを自然数の底とすると $\int_1^e \log x\,dx = \boxed{\text{ア}}$ である。

また、関数 $\log x^2 - (\log x)^2 + 1$ の $x>0$ における最大値は$\boxed{\text{イ}}$である。

そして

$$\int_1^e (\log x^2 - (\log x)^2 + 1)dx = \boxed{\text{ウ}}$$

である。

（下書き用紙）

(2)　放物線$C_1: y = x^2 + a$ の点$(2, 4+a)$ における接線 l は原点を通っている。この条件から $a = \boxed{\text{エ}}$ であることが分かる。

また別の放物線

$C_2: x = by^2 + c$ も点$(2, 4+a)$ を通り，そこでの接線はやはり l である。

この条件より，$b = \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}\,|\,\text{キ}}}$， $c = \boxed{\text{ク}}$であることが分かる。

このとき，C_1 と l と y軸で囲まれる部分の面積を S_1，

C_2 と l と x軸で囲まれる部分の面積をS_2 とすると，

$S_1 = \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$， $S_2 = \dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。

（下書き用紙）

(3)　長さ 1 の線分 AB を直径とする円 C を考え，C 上の A, B と異なる点 P をとり，P から AB へおろした垂線を PQ とする。

∠PAB を θ とすると，△APQ の面積は

$\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ス}}}$ のとき最大値 $\dfrac{\boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}\,|\,\text{チ}}}$ をとる。

また、線分 PQ, QB の長さの和は

$\theta = \dfrac{\boxed{\text{ツ}}\pi}{\boxed{\text{テ}}}$ のとき最大値 $\dfrac{\boxed{\text{ト}}+\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ をとる。

（下書き用紙）

(4)　A は次の 2 つの条件(ⅰ)、(ⅱ)をみたす，複素数からなる空ではない集合とする:

（ⅰ）A は 0 を含まない。

（ⅱ）x が A に含まれるならば，$1-\dfrac{1}{x}$ も A に含まれる。

このとき，要素の個数が 1 であるような A は，

$$\left\{\frac{\boxed{\text{ヌ}}+\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}\,i}{\boxed{\text{ノ}}}\right\},\quad \left\{\frac{\boxed{\text{ヌ}}-\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}\,i}{\boxed{\text{ノ}}}\right\}$$

の 2 種類のみである。ただしここで i は虚数単位を表す。また，要素の個数が 2 であるような A は全部で$\boxed{\text{ハ}}$種類である。
そして、A が実数だけからなる有限集合の場合は、A の要素の個数は$\boxed{\text{ヒ}}$の倍数である。

（下書き用紙）

問題 $\boxed{2}$ の解答は解答用紙に記入しなさい。答だけでなく、答を導く過程も記入しなさい。

$\boxed{2}$ 次の各問に答えよ。

(1) 座標平面上の双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ 上の点(x_0, y_0)における接線に原点から下ろした垂線とこの接線との交点を(x_1, y_1)とする。

(a) このとき x_0, y_0 を x_1, y_1 で表せ。

(b) 点(x_0, y_0)が双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ の上を動くとき，
点(x_1, y_1)の描く曲線 C_1 の方程式を求めよ。

(c) 点(x_0, y_0)が双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ 上の $x>0$ の部分を動くとき，y_1 の最大値と
そのときの x_0, y_0 を求めよ。

(2) a、$b>0$ として、2 点$(-a, 0)$，$(a, 0)$からの距離の積が b となるような
点 P の描く曲線を C_2 とする。

曲線 C_2 の方程式が曲線 C_1 の方程式と等しくなるような a, b を求めよ。

（下書き用紙）

問題 $\boxed{3}$ の解答は**解答用紙**に記入しなさい。答だけでなく、答を導く過程も記入しなさい。

$\boxed{3}$ 行列

（下書き用紙）